Sonne und Planeten

Volker Jentsch
http://www.volkerjentsch.de

August 2023

Grundlage der Astronomie ist das Newton'sche Gravitationsgesetz. Damit lassen sich die Wege sämtlicher Körper im Weltall sehr genau beschreiben. Ich folge *Feynman* (Lectures on Physics, 1963) und reduziere das aktuelle Problem mit Blick auf die Computer-Animation auf ein 2-dimensionales; die Bewegung erfolge ausschließlich in der Ekliptik, also der von Sonne und Erde aufgespannten (x,y) - Ebene. Außerdem sei die Sonne im Vergleich zu ihren Planeten unendlich schwer und folglich unbeweglich. Ich positioniere die Sonne im Punkt P = (0,0). Die Planeten sollen nur von der Anziehungskraft der Sonne bewegt werden; die Interaktion zwischen den Planeten sei dagegen, um die Rechnung einfach zu halten, vernachlässigbar gering. Die (anziehende) Kraft der Sonne gehorcht dem Newton'schen Gravitationsgesetz und ist radial vom Planeten auf die Mitte der Sonne gerichtet. Sie läßt sich in eine x- und y-Komponente zerlegen, woraus unmittelbar die Bewegungsgesetze für die Planeten folgt. Das sind zwei gekoppelte, nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen (wer's genauer haben will, konsultiere z. B. *Lectures on Physics*, volume 1, Seite 9-6 und 9-7 oder *Berkeley Physics Course*, volume 1, 1973). Die Gleichungen enthalten das Produkt aus Masse der Sonne mal Gravitationskonstante; ich setze es mit Feynman der Einfachheit halber gleich eins. Die beiden Gleichungen lassen sich mit Hilfe eines modifizierten Euler-Verfahrens recht problemlos lösen. Damit nach einem Umlauf der Startpunkt mit einer Genauigkeit von etwa 0.1% getroffen wird, ist ein Zeitschritt von < 0.005 erforderlich. Welche Bahnkurven sind zu erwarten? Das hängt von der Energie der bewegten Körper ab. Die Kurven sind geschlossen, wenn die Summe aus potentieller Energie (gleich Gravitationsenergie, negativ) und kinetischer Energie (positiv) des Planten negativ ist. Sie sind offen, wenn die Energie positiv ist. Daraus läßt sich eine Regel für die Startgeschwindigkeit v_0 und Startposition $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ des Planeten ableiten.
Sei $v_0/v_k = \alpha$ und $v_k = 1/r$ die Geschwindigkeit, welche eine perfekte Kreisbahn ergibt, mit der Sonne im Mittelpunkt (was aus dem Gleichgewicht von Zentripetal- und Gravitationskraft folgt). Es gilt (siehe Abb.1):
Die Energie des Planeten ist negativ, was Anziehung zur Folge hat, wenn
$\alpha = 1 \Rightarrow$ Umlauf auf Kreis oder $\alpha < \sqrt{2} \Rightarrow$ Umlauf auf Ellipse.
Die Energie des Planeten ist positiv, was Abstoßung zur Folge hat, wenn
$\alpha = \sqrt{2} \Rightarrow$ Parabel oder $\alpha > \sqrt{2} \Rightarrow$ Hyperbel.

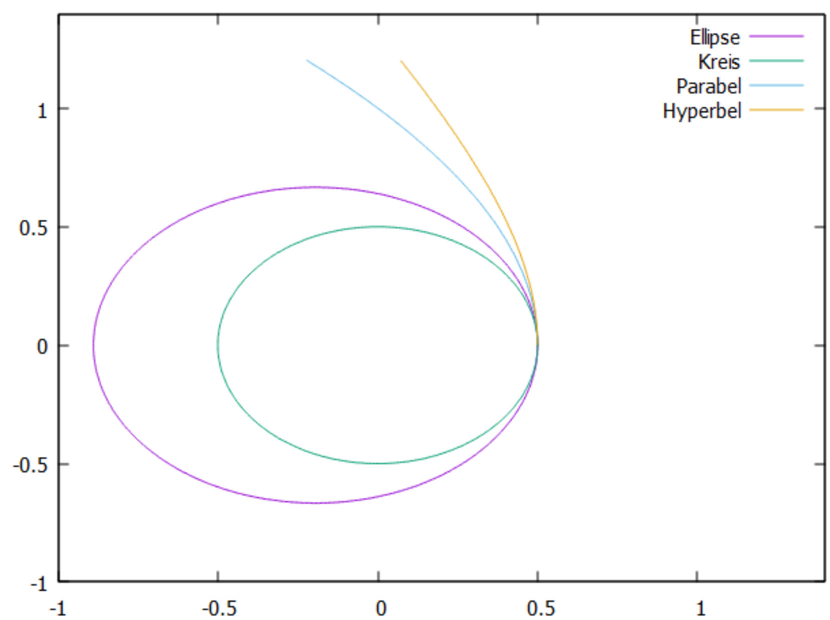

Abbildung 1: Bahn fiktiver Planeten, wenn sich der anziehende Körper im Punkt (0,0) befindet.